Hasard et Chaos

Jacques Le Bourlot

Avril 2004

1 Introduction

“C’est moi ou le chaos !”. Dans nos expressions courantes, le terme “chaos” revient souvent pour qualifier le plus grand désordre. On l’associe à une situation insaisissable, dominée par le hasard. Or, en physique, “chaos” se rapporte à des phénomènes bien identifiés, dans lesquels la prévision rencontre certes des limites importantes, mais où le hasard ne joue aucun rôle. Mais tout d’abord qu’est-ce que le hasard ? Ici encore, ce terme du langage courant recouvre des réalités diverses pour le physicien.

Nous allons préciser ces termes, et montrer que, face à une situation “chaotique”, on n’est pas tenu de s’en remettre aux seuls décrets du destin.

2 Hasard ou hasards

“La prévision est un art difficile, surtout quand elle concerne l’avenir”. Au delà du bon mot (P. Dac), on peut trouver des causes différentes à notre difficulté à prévoir le résultat d’une expérience. Pour tenter de restreindre l’immense variété de possibilités offertes par la vie de tous les jours les physiciens raffolent d’expériences simples, précises, parfois “inutiles” mais permettant de poser une question clairement (et éventuellement de tenter d’y répondre).

La “science” d’aujourd’hui a accumulé tellement de succès que l’on est habitué à la voir réaliser des prouesses : on a été capable de préparer et de réaliser des voyages sur la Lune, d’imaginer puis de réaliser des greffes de coeur, etc... Pourtant certaines expériences simples restent “imprévisibles”. On peut distinguer au

moins trois types de raisons pour lesquelles notre pouvoir de prévision est mis en échec :

- Certains phénomènes physiques incorporent intrinsèquement une part d'aléatoire. C'est entre autre le cas de tous les phénomènes qui se déroulent à l'échelle des particules. On connaît très bien le temps nécessaire pour que la moitié des atomes d'un morceau d'uranium se désintègrent (à cause de sa radio-activité), mais il est impossible de prédire quand un atome particulier éclatera.
- De façon beaucoup plus banale, il nous arrive aussi de ne pouvoir prédire correctement un résultat d'expérience en raison d'un simple manque d'information. Si l'on prend deux chaussettes dans un tiroir dans le noir, il est très possible qu'elles ne soient pas de la même couleur. Il suffit ici d'allumer la lumière pour accéder à l'information visuelle en plus du toucher et tout s'arrange.
- Enfin, de nombreux autres phénomènes semblent échapper également à notre pouvoir de prédiction, à tel point que nous les utilisons même pour "fabriquer" du hasard : par exemple, le jeu de pile ou face, ou le lancer de dés (voir l'article sur les statistiques dans ce volume).

Il y a là trois "types" de hasard bien différents. Dans le premier cas, ce "flou" irréductible de la physique aux plus petites échelles n'est lié ni à un manque de connaissance, ni à des imperfections de nos instruments, mais à la nature même du monde. Nous n'en parlerons plus ici.

Dans le deuxième, nous sommes au contraire typiquement dans un problème à "variables cachés" : l'information existe (allumer la lumière permet de voir la couleur des chaussettes). Encore faut-il savoir où aller chercher cette information. Une part importante du travail de recherche consiste justement à explorer des pistes nouvelles à la poursuite d'informations originales[1].

Le troisième cas est plus complexe. Lancer un dé semble une opération simple. D'ailleurs, si je vous le lance à la figure vous n'aurez probablement aucun mal à le rattraper au vol. L'étude des mouvements est à la fois très intuitive (ainsi que le démontrent avec brio les joueurs de ping-pong) et une des plus anciennes branches

[1]Notons qu'Einstein croyait que la mécanique quantique est une théorie "à variables cachées", et que la nécessité d'une description statistique ne venait que de nos limitations humaines. Des expériences plus récentes ont prouvé qu'il avait tort, et que cet aspect probabiliste est bien intrinsèque.

de la physique (depuis Galilée et Newton). La conquête spatiale a bien montré quel degré de sophistication on peut atteindre dans ce domaine. Et pourtant on ne sait pas sur quelle face le dé va tomber, ou dans quelle case la boule de la roulette va finir sa course.

Il y a là une complexité intrinsèque, bien différente du hasard de la radioactivité : on peut améliorer la prédiction en raffinant les mesures et les calculs, on peut essayer (en laboratoire) de laisser tomber le dé plusieurs fois de façon suffisamment semblable pour obtenir (presque) à chaque fois le même résultat, mais malgré tout l'expérience finit toujours par échapper à l'expérimentateur. La moindre imprécision semble grossir jusqu'à dominer le résultat de l'expérience, rendant toute prédiction à long terme vaine.

C'est là la définition même du chaos en physique, cette sensibilité extrême aux "conditions initiales". Dans la suite de cet article nous allons voir comment elle peut s'introduire dans des phénomènes apparemment très simple, et comment malgré tout nous ne sommes pas complètement démunis face à elle.

3 Une expérience de chaos

L'observation d'un jet de dé semble simple, mais présente un obstacle sérieux : le jet n'est pas reproductible. Même si l'on tente de lancer le dé de façon aussi semblable que possible deux fois de suite, il reste des différences observables. C'est d'ailleurs sa fonction principale ! Et comme cette expérience est très brève, il est difficile d'en tirer beaucoup d'informations. On trouve dans les magasins de gadgets de jolis jouets, composés de mobiles et d'aimants et dont le balancement irrégulier fascine. Ce sont des exemples simples de mouvements chaotiques ; malheureusement, ils ne sont pas très "réglables", et ne permettent pas au physicien d'expérimenter.

Nous allons donc "travailler" à partir d'une autre expérience que l'on peut simplement réaliser chez soi. Elle est construite en briques "Légo®", et ressemble à une simple balançoire (voir la figure (1)). Comme nous voulons pouvoir prendre tout notre temps pour l'observer, il nous faut fabriquer un mouvement "entretenu". Un petit moteur électrique permet de compenser les pertes d'énergie dues au frottement, et maintient le personnage en mouvement indéfiniment[2].

[2] Enfin, ...tant qu'il y a des piles.



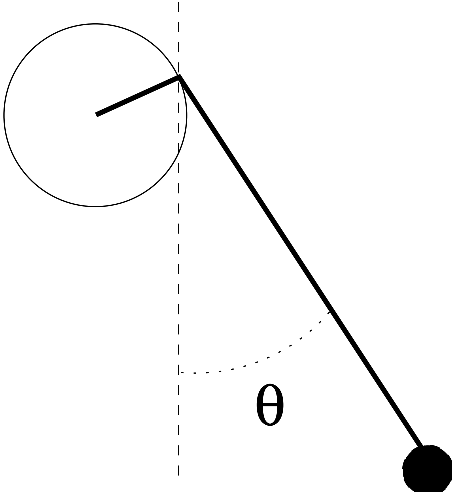


Fig. 1 – Balançoire en Légo®. Les décorations, gadgets et fantaisies sont l'oeuvre de mes fils que je remercie de leur aide précieuse. Les piles sont dans le boîtier de gauche. Le moteur (au milieu, en gris) fait tourner une série d'engrenages (une sorte de "boîte de vitesse") qui entraîne une manivelle (au fond). La balançoire tourne librement autour de l'axe décentré. Sur le schéma, le petit bras (manivelle tourne à vitesse angulaire constante. L'articulation libre décrit le petit cercle.

<Mettre ici un schéma>

L'idée de base est de "décentrer" l'axe de la balançoire, qui est placé à l'extrémité de la manivelle du moteur. Ce bras de levier donne de l'élan à la balançoire en tournant à une vitesse constante. Le poids du bonhomme le ramène vers le bas. On peut jouer avec les rapports d'engrenages pour obtenir une vitesse de rotation comparable à la vitesse de la balançoire sans moteur, et changer facilement la longueur et la masse de la balançoire. Les frottements sont plus difficiles à contrôler. Une fois fixés tous les paramètres qui contrôlent le dispositif, il ne reste qu'à appuyer sur le bouton. Le moteur entraîne la balançoire qui se met à bouger. L'observation commence.

Si on l'a bien réglée, la balançoire peut alors avoir un mouvement très complexe, qui semble ne jamais se répéter. En revanche, en changeant très peu, par exemple, sa longueur, on peut avoir au bout de quelques secondes un mouvement simple, qui se répète. On a fabriqué un système capable d'avoir des comportements chaotiques pour certains réglages, et réguliers pour d'autres !

Faire des mesures fiables à partir d'un tel jouet reste une gageure. En revanche, il est suffisamment simple pour que son comportement puisse être calculé à l'aide d'un ordinateur. Un tel exercice est à la portée d'un étudiant de licence de physique[3]. Dans la suite, les résultats présentés proviennent de tels calculs, et non de mesures. Faire ainsi de l'expérimentation "in silico" permet de varier très librement les conditions d'expérience, de façon parfaitement reproductible. Les comparaisons de ces résultats avec la "vraie vie" permettent d'ajuster certains paramètres comme (par exemple) l'importance du frottement.

Ce système est simple car son "état" à un instant donné peut être complètement précisé en mesurant deux quantités seulement :

– L'angle entre la balançoire et la verticale. Nous suivrons ici l'usage des physiciens qui le mesurent en radians[4]. Cet angle vaut 0 quand la balançoire est au point le plus bas, il est positif quand elle est à droite de la verticale, et négatif à gauche.
– La vitesse de la balançoire. La vitesse est positive lorsque l'angle augmente (le bonhomme avance), et négative quand l'angle diminue.

[3]Nous fournissons un petit programme en langage C permettant à tous de reproduire sur un ordinateur personnel les expériences décrites, et d'explorer par lui-même les comportements variés de notre balançoire. Voir le site web indiqué en fin d'article.

[4]1 demi-tour = $180° = \pi$ radians

Exercice : Quand l'angle est négatif et la vitesse positive, est-ce que le bonhomme descend ?

Réponse : Oui ! On est à gauche, l'angle augmente depuis une valeur négative, donc on se rapproche de 0, le point le plus bas. Comparez au mouvement d'un plongeur qui remonte vers la surface.

Les lois de la mécanique, connues depuis Newton, nous disent que l'évolution du système est entièrement fixée par la connaissance de cet état.

C'était d'ailleurs le rêve de Laplace, pour qui le "système" était le Monde dans sa globalité, de pouvoir prédire l'avenir de l'Univers à partir de la connaissance **exacte** de son état à un instant donné. Tout le problème, bien sûr, réside dans ce "exact" ! La physique du XXeme siècle a dissipé cette illusion.

Le problème qui se pose à nous, est que la connaissance de notre modeste balançoire n'est jamais exacte. Même avec le plus grand soin, nous ne pouvons mesurer la position et la vitesse du bonhomme qu'avec une certaine imprécision. Si l'influence de ces incertitudes s'atténue au cours du temps, nous aurons un comportement régulier. Sinon, nous aurons un comportement chaotique. Il nous faut donc maintenant trouver les bons outils pour décrire ce comportement, et pour cela les physiciens ont développer depuis une trentaine d'année une nouvelle branche de connaissances : l'étude des "Systèmes dynamiques".

4 les systèmes dynamiques

Galilée l'a dit le premier, et 400 ans d'évolution des connaissances l'ont constamment confirmé : "La Nature parle en langage mathématique". Pour pouvoir progresser dans l'étude de notre système, il nous faut donc faire l'effort de nous adapter à ce langage. Le comprendre si possible, mais au moins le décrypter. Cela nécessite un certain effort d'abstraction, mais le jeu en vaut la chandelle. Pendant longtemps, les calculs éventuels ne pouvaient se faire qu'à la main. On avait donc (souvent) une bonne compréhension qualitative des phénomènes, mais leur description quantitative était limitée[5]. Les choses ont radicalement changé avec l'apparition des ordinateurs qui permettent de régler en quelques minutes

[5]Urbain Le Verrier a fait appel à des armées de calculateurs(trices) dans l'analyse du mouvement d'Uranus qui lui a permis de prédire l'existence de Neptune. Cela reste un exemple exceptionnel.

des problèmes jugés auparavant "formidables". Encore convient-il de poser la bonne question...

On regroupe sous le nom de "systèmes dynamiques" les expériences (comme notre balançoire) dont l'état est décrit par un certain nombre de **variables**, et que l'on peut régler avant le début de l'expérience à l'aide de différents **paramètres**. Cette distinction est très importante : l'expérimentateur est libre de choisir un paramètre (je peux augmenter la longueur de la balançoire par exemple), mais ne peut que constater (mesurer) la valeur d'une variable à un instant donné (la position par exemple).

Une expérience est donc plutôt une **famille** d'expériences dans lesquelles on a donné aux paramètres toutes les différentes valeurs possibles, et observé les différents comportements, révélés par les différentes évolutions des variables.

Un problème majeur est de savoir comment visualiser ces évolutions. Imprimer des colonnes de chiffres parle très peu à l'imagination, même à celle des "savants fous". C'est une difficulté que nous savons résoudre dans la vie de tous les jours : pour nous rendre chez un ami qui vient de déménager, il n'est pas très commode qu'il nous dise : "Tu fais 5 km vers l'ouest et simultanément 3 vers le sud, puis, 2 vers l'ouest et simultanément 4 vers le nord, ...", ni même "Tu vas vers Gy-les-Nonains, puis tu prends vers la Selle en Hermois, puis...". La meilleure solution est d'avoir une carte et de visualiser le chemin. Les positions et les distances se lisent facilement, et nous pouvons instantanément nous faire une vue globale de la route à suivre. Bien sur, on ne trouve pas sur la carte la position des bouchons, et nous ne pouvons pas savoir "quand" nous passerons par tel ou tel village, mais nous connaissons précisément l'ordre dans lequel ils se succéderont.

De la même façon, les physiciens construisent une "carte virtuelle" en considérant chaque variable comme une coordonnée. Cela permet de représenter de façon visuelle un chemin qui n'existe pas dans le monde réel. On appelle cette "carte" "l'espace de phase". La position d'un point dans cet espace permet de lire les valeurs de toutes les variables à un instant donné une fois que l'on s'est mis d'accord sur ce que représente chacune des directions. Cet espace a donc autant de dimensions qu'il y a de variables, deux pour notre balançoire, ce qui est bien pratique pour faire des petits dessins dans un livre...

<Ajouter schéma sur la figure (SP)>

Lorsque le système évolue dans le temps, les valeurs des variables évoluent

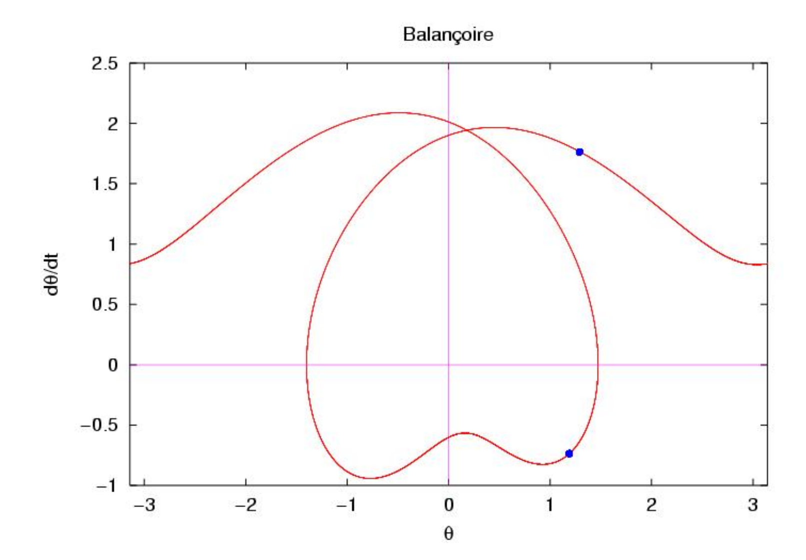


Fig. 2 – Trajectoire de phase. Horizontalement, on lit l'angle de la balançoire avec la verticale (en radians, donc de $-\pi$ à π, et il faut imaginer ce graphique collé sur un cylindre : quand on sort par la droite, on rentre par la gauche...), et verticalement sa vitesse. Le point bleu correspond à un instant particulier.

et donc la position du point change dans l'espace de phase, et il dessine donc une courbe que l'on nomme "trajectoire de phase". On voit sur la figure (2) que cette représentation permet de "percevoir" instantanément l'ensemble des caractéristiques de l'expérience. Suivons ce qui arrive en partant du point bleu le plus bas :

- Notre position initiale correspond à un angle θ un peu supérieur à 1 (donc la balançoire est vers "l'avant"), et une vitesse négative (donc la balançoire redescend).
- En descendant, nous allons passer "en bas" : $\theta = 0$, mais comme la vitesse n'est pas nulle, emporté par l'élan la balançoire continue, θ continue à diminuer, devient négatif et la balançoire remonte.
- On remonte de plus en plus (le point continue à se déplacer vers la gauche, jusqu'à atteindre l'axe horizontal).
- A cet instant la vitesse est nulle, mais la balançoire n'est pas au repos ! son poids va l'obliger à repartir. On repart donc en suivant toujours la ligne rouge : la vitesse devient positive, θ augmente, la balançoire redescend.
- Arrivé à $\theta = 0$, (en haut de la trajectoire de phase, bien que la balançoire

soit au point le plus bas), on constate que l'on va maintenant beaucoup plus vite que dans l'autre sens. Du coup, entraîné par l'élan (nous passons par le deuxième point bleu), θ augmente jusqu'à atteindre π (3,14) c'est à dire que la balançoire se retrouve à l'envers ! ...et continue.

– La balançoire fait donc un tour complet, ce qui se traduit pour la trajectoire de phase par une sortie du graphique par la droite et une rentrée par la gauche, comme dans les jeux vidéo !
– On reviens donc vers $\theta = 0$ (balançoire en bas) en tournant toujours dans le même sens, mais cette fois-ci la vitesse diminue très vite. Elle s'annule avant que la balançoire soit de nouveau à la verticale.
– La vitesse redevient négative, et la balançoire redescend, pour rejoindre le point de départ au premier point bleu, et tout recommence.

On voit donc que ce mouvement est périodique : la balançoire oscille une fois, puis fait un tour complet, puis une oscillation, etc... Ce mouvement sophistiqué est bien sûr dû au moteur d'entraînement. De temps en temps, le mouvement naturel de la balançoire et celui de la manivelle du moteur vont dans le même sens. Entraîné par l'élan, on fait alors un tour complet. A d'autres moments, ces mouvements s'opposent. La balançoire freine, et on a une oscillation simple.

Toute cette information est contenue dans la figure. Nous avons trouvé une façon compacte et claire de rassembler une grande quantité d'informations, impossible à appréhender en observant seulement l'expérience réelle dans notre "vrai" monde de tous les jours. ...Mais il y a un prix à payer : nous avons perdu l'information sur le temps ! Nous pouvons savoir le "QUOI", quel est le mouvement de la balançoire, comment s'enchaînent les positions et les vitesses, mais nous ne savons pas "QUAND". Il faudrait faire un dessin animé pour ajouter cette information supplémentaire (en faisant par exemple bouger le point bleu le long de la courbe rouge).

Cette démarche est caractéristique et nous allons la répéter par la suite : pour mieux comprendre le phénomène, il faut accepter de sacrifier une partie de l'information disponible, pour mieux faire ressortir la petite partie vraiment significative.

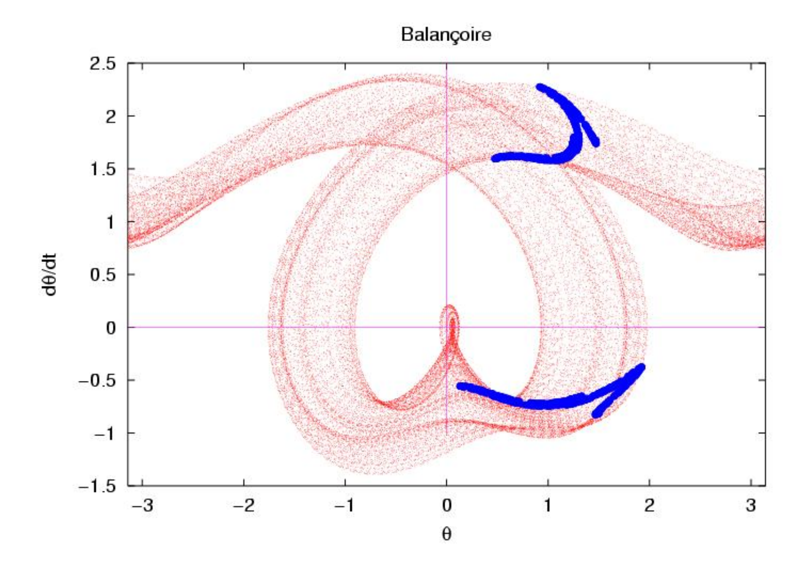


FIG. 3 – Trajectoire de phase chaotique. Les points bleu correspondent à des "positions" relevées à intervalles de temps réguliers (section de Poincaré).

5 Une trajectoire de phase chaotique

Plaçons maintenant notre balançoire dans des conditions où son mouvement est complexe (peut-être avons-nous pour cela collé une pièce de monnaie sous le bonhomme, ou glissé une allumette contre la manivelle pour augmenter le frottement, ...bref, nous avons changé un paramètre). Nous pouvons également tracer la trajectoire de phase pour les nouvelles conditions.

"L'objet" virtuel (figure (3)) est maintenant beaucoup plus complexe. On retrouve qualitativement le comportement précédent (alternance d'oscillations et de "cul par dessus tête" de la balançoire), mais un flou est apparu. Il est maintenant impossible de suivre une trajectoire précise tant elles semblent se mélanger.

Et pourtant, il ne se passe pas n'importe quoi ! Certaines zones de l'espace de phase restent obstinément blanches. On peut donc dire avec certitude qu'il existe des états du système qui ne se produiront **jamais**. On voit aussi que certaines zones sont plus rouges. Elles correspondent à des états plus probables, vers lesquels le système revient souvent.

On a donc une description statistique du comportement chaotique de la balançoire : on ne sait pas prédire précisément ce qui va se passer dans **un** cas parti-

culier, mais on a une connaissance précise du comportement adopté **en moyenne**.

On peut aller un peu plus loin dans la description en renonçant une nouvelle fois à une partie de l'information dont on dispose. Cette trajectoire de phase chaotique, embrouillée, finalement nous masque le comportement du système. Au lieu d'enregistrer **toute** la trajectoire, nous allons nous contenter de l'échantillonner à intervalles de temps réguliers. Cette technique a été inventée il y a plus d'un siècle par Henri Poincaré qui cherchait à comprendre les trajectoires compliquées de petites planètes du système solaire. Plutôt que de suivre l'intégralité de leur mouvement, il a choisi de relever leur position lorsqu'elles passaient par une direction précise du ciel. Et cela lui a permis de trouver des règles de classifications des mouvements des petits corps qui sont encore valides aujourd'hui. Cette opération s'appelle prendre une "section de Poincaré".

Ici, nous allons observer notre balançoire dans le noir, en ne l'éclairant qu'avec un stroboscope. Nous n'avons donc son état (la position et la vitesse) qu'à des instants régulièrement espacés, au moment du flash. Nous choisissons pour fréquence du stroboscope la même que celle du moteur[6] (eh non, ce n'est pas par hasard...) ; le résultat apparaît sur la figure (3) sous la forme des points bleu.

Une nouvelle fois, en sacrifiant une partie de l'information, on voit un ordre caché se dégager. Ces points ne sont pas du tout répartis au hasard, mais distribués le long d'une (presque) ligne. "Presque", parce qu'elle a malgré tout une certaine épaisseur. Les deux objets bleu de la figure correspondent à deux "sections de Poincaré" faites en commençant à des instants décalés dans le temps (mais toutes les deux avec la même fréquence).

Dans une animation, on verrait ainsi la section voyager le long du paquet de trajectoires rouges en se déformant et en se repliant sur elle même, avant de se retrouver identique à elle même après avoir parcouru l'ensemble de la trajectoire de phase.

6 Un autre état chaotique

En changeant de nouveau les réglages de la balançoire (les paramètres), on peut obtenir des trajectoires de phase franchement désordonnées, quasiment illisibles. Il est inutile dans ce cas de les conserver. On peut observer directement la

[6] C'est à dire que le flash s'allume chaque fois que la manivelle a fait exactement un tour.

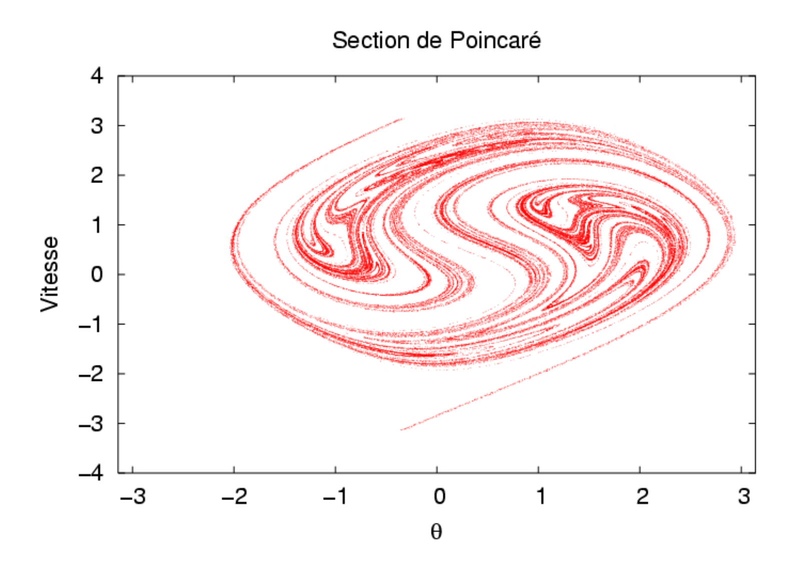


Fig. 4 – Section de Poincaré

section de Poincaré et chercher s'il y a toujours un ordre caché.

La figure (4) montre que c'est toujours le cas. Nos points bleu "presque" alignés (devenus rouge (!)) ont maintenant envahi l'essentiel de l'espace de phase, mais ils ne l'ont pas fait n'importe comment. La répartition des points fait penser à ce que l'on observe en mélangeant doucement de la crème de marrons[7] et de la crème à la vanille, ...et ce n'est toujours pas par hasard ! On observe une structure très organisée, feuilletée, dans laquelle des petits détails sont cachés dans d'autres plus grands mais très semblables.

On a ici un exemple de "structure fractale", un objet géométrique complexe, dans lequel les parties semblent être des photocopies en réduction de morceaux plus grands.

Si l'on pouvait de nouveau suivre comment se déforme et évolue cette section de Poincaré au fur et à mesure qu'elle progresse le long des trajectoires de phase on verrait que l'image du mélange de crème est beaucoup plus qu'une simple fantaisie. L'objet se déforme effectivement, certaines parties sont étirées, ce qui éloigne les points les uns des autres, pendant que d'autres se replient et se trouvent "enfermées" dans des boucles.

Tout se passe comme lorsque l'on fait une pâte feuilletée : plaçons deux cerises sur un morceau de pâte, et étalons. Les cerises s'éloignent un peu l'une de

[7]J'avais choisi de la crème au chocolat, mais ma femme préfère la crème de marrons...

l'autre, mais restent dans le même coin du morceau de pâte. Maintenant, on replie le tout, et on recommence. Les cerises s'éloignent un peu plus. Au bout de plusieurs opérations d'étirement-repliement, il va arriver un moment où une cerise est emportée dans le repli, et pas l'autre. A partir de ce moment leurs "mouvements" dans la pâte deviennent complètement indépendants. Cette opération est appelée la "transformation du boulanger".

On a, à tout instant, co-existence de zones d'étirement et de zones de repli. Si l'on essaye de suivre une trajectoire particulière dont on connaît le point de départ avec une petite incertitude, on peut au début suivre très bien ce qui se passe. Mais toutes les trajectoires qui sont parties de la même zone ont tendance à s'écarter les unes des autres, et on ne sais pas laquelle est la nôtre. L'incertitude grandit donc au fil du temps. Arrive un moment où notre zone d'incertitude va être partiellement repliée. On ne peut pas savoir dans quelle partie se trouve notre trajectoire. On a donc perdu le contact.

C'est là l'essence d'un mouvement chaotique. Le comportement du système obéit à des lois déterministes, ce comportement est donc, en principe, parfaitement prédictible. Mais la moindre incertitude présente au départ s'amplifie jusqu'à dominer complètement la prédiction. On ne peut donc pas prévoir au delà d'un certain "horizon temporel". Simultanément, les replis permanents des trajectoires dans l'espace des phases les empêchent de s'éloigner les unes des autres indéfiniment, et les ramènent en permanence sur le même "comportement moyen". Deux trajectoires qui se sont "perdues de vue" vont "un jour" se retrouver de nouveau très proches, mais il est impossible de prédire quand.

On a donc simultanément une information statistique de grande qualité sur un grand nombre d'expériences, et une prédiction limitée sur une expérience particulière.

7 Varions les paramètres

On peut maintenant se demander pourquoi le comportement de la balançoire est régulier dans certains cas, et devient chaotique en changeant (parfois très légèrement) les paramètres de contrôle. A priori, rien ne semble distinguer les différents cas, ...avant de commencer l'expérience.

Une nouvelle fois, nous allons pouvoir progresser dans la compréhension du

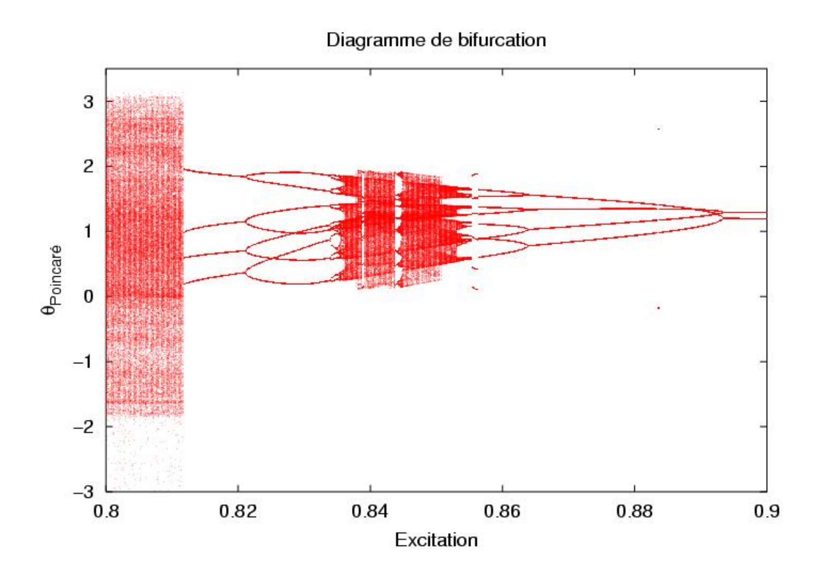


Fig. 5 – Diagramme de bifurcation.

système en abandonnant une partie de l'information pour mieux dégager une synthèse. Chaque point d'une section de Poincaré correspond à la position **et** à la vitesse de la balançoire à un instant donné (quand nous avons déclenché notre stroboscope). Nous allons maintenant faire un grand nombre d'expériences successives en faisant varier très progressivement la longueur de la manivelle, et nous enregistrons les résultats.

Pour ne pas être submerger par les chiffres, nous ne gardons bien sûr que la section de Poincaré, et encore pas complètement : nous allons aussi abandonner les vitesses et ne garder que les positions. On peut alors construire un nouveau graphique dans lequel on porte en abscisse la valeur de l'excitation du système (la longueur de la manivelle), et en ordonnée, toutes les positions des points de la section de Poincaré.

On observe alors sur la figure (5) deux types de comportements : pour certaines valeurs de l'excitation (ici, "0.88" ou "0.82" par exemple), il n'y a qu'un petit nombre de points dans la section de Poincaré correspondante (que l'on retrouve en traçant un trait vertical à la valeur voulue de l'excitation). Cela correspond à un mouvement périodique (comme le premier que nous avons étudié). Quand le système est passé par chacun de ces points, il revient au premier, et répète exactement la même série.

Le deuxième type de comportement correspond aux états chaotiques. On a une

infinité de points dans la section de Poincaré, regroupés de façon non homogène (et ne prenant pas forcément toutes les valeurs possibles). Le système revient souvent dans le même voisinage, mais jamais exactement de la même façon.

L'information nouvelle que nous voyons surgir de cette représentation, c'est qu'en faisant varier progressivement la valeur de l'excitation on ne passe pas n'importe comment d'un état à l'autre.

Partons de la droite du graphique ("0.9"). Il n'y a que deux points ; le système oscille de façon assez simple. Lorsque l'on diminue l'excitation en variant la longueur de la manivelle, la position exacte de ces points se modifie légèrement, mais ils tracent deux lignes aisément identifiables. Vers la valeurs "0.89" une modification se produit : chaque ligne se dédouble. Pour une valeur de l'excitation ("0.87" par exemple), on a donc maintenant 4 points dans la section de Poincaré. Ce phénomène s'appelle une "bifurcation". En comparant le mouvement de la balançoire avec le mouvement précédant la bifurcation, on constate des ressemblances : il y a toujours alternance d'une oscillation et d'un tour complet. Mais maintenant, deux oscillations successives n'ont pas la même amplitude. ce n'est que tous les deux tours que le mouvement se répète exactement ; la période du mouvement a donc doublé.

En continuant à diminuer l'excitation, on constate que de nouvelles bifurcations se produisent, avec à chaque fois doublement du nombre de points. Et elles se produisent à des intervalles de plus en plus courts, jusqu'à ce qu'on se retrouve dans une zone de chaos.

Ce phénomène est connu comme une route vers le chaos par "doublement de période". Le comportement du système, au départ très simple, devient de plus en plus complexe lorsque l'on modifie l'un de ses paramètres, au début en restant périodique, mais avec des périodes qui augmentent. Lorsque la période devient infinie, le comportement ne se répète plus jamais.

En continuant à diminuer l'excitation, on retrouve des comportements périodiques, en passant dans l'ordre inverse par des bifurcations qui cette fois font diminuer d'un facteur 2 le nombre de points dans la section de Poincaré. Cela se poursuit jusque vers une valeur d'environ "0.81", ou l'on constate une "explosion de chaos".

Essayer de comprendre son origine nous entraînerait vraiment trop loin, mais l'analyse peut se poursuivre (en devenant de plus en plus complexe) pour essayer

de décortiquer le comportement du système.

8 Conclusion

Nous avons montré que l'apparent désordre présent dans un mouvement chaotique n'est pas en contradiction avec les "lois de la physique", telles quelles sont connues depuis Newton. Un système chaotique :

– Obéit à des règles de comportement déterministes (que l'on peut mettre en équation, et théoriquement résoudre).
– Comporte simultanément un "amplificateur d'erreur" qui empêche de recommencer deux fois de rang exactement la même expérience.

Il présente donc une sensibilité aux conditions initiales qui est la marque du chaos. Pour un même système, cette sensibilité peut être présente pour certains réglages et pas pour d'autres, ce qui permet de faire passer le système d'un comportement apparemment désordonné à un comportement régulier une fois que l'on a compris sur quel levier agir.

Pour retrouver au sein de la complexité apparente les règles cachées, il est nécessaire d'accepter un certain degré d'abstraction. En sachant comment ordonner une petite partie bien choisie des informations confuses directement accessibles à nos sens, nous pouvons voir apparaître un ordre sous-jascent inaccessible au premier abord. Ici aussi "l'essentiel est invisible pour les yeux".

Nous avons décortiqué ici un système très simple, mais les principes sont tout à fait généraux, et s'appliquent aussi dans des problèmes à très grand nombre de variables. C'est par exemple le cas de la prédiction du temps. La météo quotidienne relève du calcul d'une trajectoire particulière. Comme le système "atmosphère" est chaotique, cette prédiction n'est précise que sur des temps courts. Nous ne connaissons qu'imparfaitement l'état de l'atmosphère à une instant donné (manque de mesures, imprécision des instruments), et l'influence de ces incertitudes augmente avec la durée de la prévision jusqu'à la rendre inutilisable. Dans le cas de la météo, l'horizon de prédiction est de l'ordre de 15 jours. Nous pouvons donc espérer avoir un bulletin fiable pour la semaine à venir, mais il est exclus qu'un jour on puisse prédire le temps un mois à l'avance, quels que soient les progrès des ordinateurs.

En revanche, la prédiction des climats relève d'une analyse globale du "système-atmosphère" et nous pouvons étudier son évolution à long terme, comme nous avons étudié des familles de trajectoires. Les caractéristiques moyennes calculées (à l'échelle de dizaines d'années) sont très fiables, ...dans la mesure où les hypothèses de base du modèle sont pertinentes.

Terminons enfin en tordant le cou à un mythe, celui de "l'effet papillon". Le battement d'aile d'un papillon au Chili ne déclanche **pas** un ouragan en France. Ce battement d'aile fait parti des incertitudes inévitables qui empèchent de prévoir à long terme le temps qu'il fera, mais il ne change rien sur le temps qu'il fait en moyenne. Il y aura toujours des giboulées en Mars, et de la neige à Noël. Tout au plus peut-on supposer qu'un orage prévu à 8h au dessus de Bordeaux se produira à 15h au dessus de Toulouse, mais on est incapable de le prouver ou de le démentir.

Références

[1] Ruelle, D., "Hasard et chaos", Points, Odile Jacob, 1991.

[2] Bergé, P., Pomeau, Y., Dubois-Gance, M., "Des rythmes au chaos", Opus, Odile Jacob, 1997.

A Annexe

Plusieurs fois dans le texte, nous avons regretté de ne pouvoir montrer des figures animées. De telles animations sont disponibles "en ligne" sur un site web associé à cet article :

http ://aristote.obspm.fr/treilles/HandC.html

On y trouve :

- Le programme (en langage C) ayant permis de modéliser le comportement de la balançoire.
- Un mode d'emploi de ce programme.
- Deux animations montrant le mouvement de la balançoire
  - Un mouvement périodique
  - Un mouvement chaotique

- Les trajectoires de phase pour toutes les valeurs de l'excitation de la figure (5).
- Une démonstration de la "sensibilité au conditions initiales" pour deux mouvements partant de conditions proches.

La difficulté est très variable, du pur plaisir visuel, aux cours d'Université. Piochez selon votre curiosité.